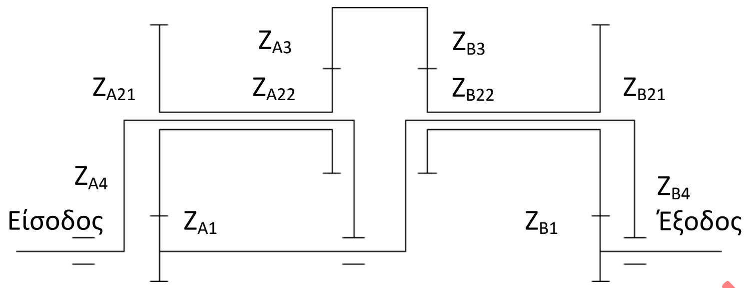
ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ ΙΙ – ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2016

1. Για το πλανητικό σύστημα του σχήματος να γραφεί η χαρακτηριστική εξίσωση εισόδου-εξόδου όταν: α) ο ήλιος του συστήματος Α είναι ακίνητος και β) όταν η στεφάνη του συστήματος Α είναι ακίνητη. Να υπολογιστεί η σχέση μετάδοσης του πλανητικού συστήματος για τις περιπτώσεις (α) και (β) εάν είναι γνωστό πως τα δύο επιμέρους πλανητικά συστήματα είναι πανομοιότυπα. Οι αριθμοί οδόντων των τροχών θεωρούνται γνωστοί όπως στο σχήμα.



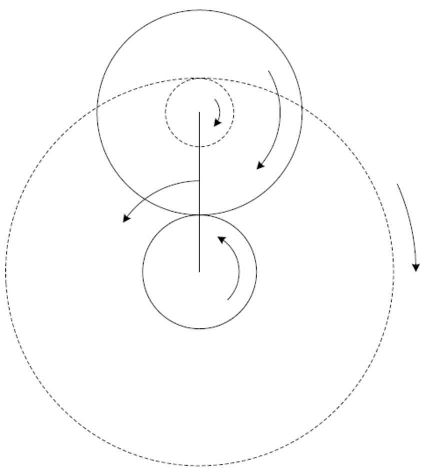
<u>ΛΥΣΗ</u>:

Το πρώτο βήμα για την επίλυση της άσκησης είναι ο σχεδιασμός των μονογραμμικών σχεδίων των δύο επιμέρους πλανητικών συστημάτων Α και Β που να δείχνουν τις φορές περιστροφής.

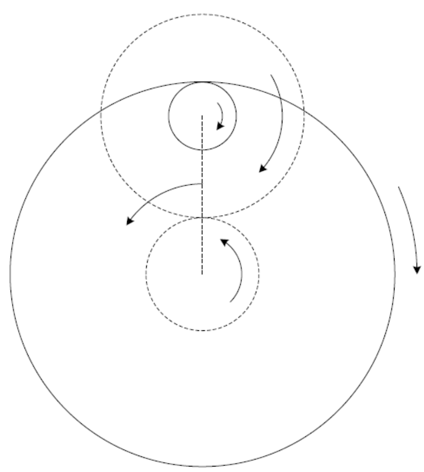
Προφανώς η φορά περιστροφής της εισόδου n_{A4} καθώς και μίας εκ των υπολοίπων (έστω n_{A1}) γίνεται αυθαίρετα. Η τελική λύση της άσκησης μας δείχνει ποια είναι η πραγματική φορά περιστροφής.

Ειδική μνεία πρέπει να δοθεί στην σωστή τοποθέτηση των συγγενών φορών περιστροφής ($n_{A3} = n_{B3}$, $n_{A1} = n_{B4}$ κτλ)

Τα μονογραμμικά σχήματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα με την σύμβαση ότι κοιτάμε το πλανητικό από αριστερά (είσοδος).



Πλανητικό Σύστημα Α



Πλανητικό σύστημα Β

Στην συνέχεια πρέπει να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης:

Α:

$$n_{A1}Z_{A1} = n_{A21}Z_{A21} + n_{A4}Z_{A1}$$

$$n_{A21} = n_{A22}$$

$$n_{A3}Z_{A3} = n_{A22}Z_{A22} - n_{A4}Z_{A3} \Leftrightarrow n_{A22} = n_{A3}\frac{Z_{A3}}{Z_{A22}} + n_{A4}\frac{Z_{A3}}{Z_{A22}}$$

$$n_{A1} = n_{A3}\frac{Z_{A3}Z_{A21}}{Z_{A1}Z_{A22}} + n_{A4}(1+\frac{Z_{A3}Z_{A21}}{Z_{A1}Z_{A22}}) \Leftrightarrow n_{A1} = n_{A3}S_A + n_{A4}(1+S_A) \quad (1)$$

Β:

$$n_{B3}Z_{B3} = n_{B22}Z_{B22} - n_{B4}Z_{B3} \Leftrightarrow n_{B22} = n_{B3}\frac{Z_{B3}}{Z_{B22}} + n_{B4}\frac{Z_{B3}}{Z_{B22}}$$

$$n_{B1}Z_{B1} = n_{B21}Z_{B21} + n_{B4}Z_{B1}$$

$$n_{B21} = n_{B22}$$

$$n_{B1} = n_{B3}\frac{Z_{B3}Z_{B21}}{Z_{B1}Z_{B22}} + n_{B4}(1+\frac{Z_{B3}Z_{B21}}{Z_{B1}Z_{B22}}) \Leftrightarrow n_{B1} = n_{B3}S_B + n_{B4}(1+S_B) \quad (2)$$

$$n_{A3} = n_{B3}$$

$$n_{A1} = n_{B4}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$n_{B1} = n_{A4}(1+S_A)(1+S_B) + n_{B3}(S_AS_B + S_A + S_B) \quad (3)$$

α) Ήλιος συστήματος Α ακίνητος: $n_{A1} = 0 = n_{B4}$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{n_{B1}}{n_{A4}} = (1+S_A)(1+S_B) - \frac{1+S_A}{S_A}(S_AS_B + S_A + S_B) \Leftrightarrow \frac{n_{B1}}{n_{A4}} = -\frac{1+S_A}{S_A}S_B \quad (4)$$

β) Στεφάνη συστήματος Α ακίνητη: $n_{A3} = 0 = n_{B3}$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{n_{B1}}{n_{A4}} = (1+S_A)(1+S_B) \quad (5)$$

Πανομοιότυπα γεωμετρικά χαρακτηριστικά σημαίνει: $Z_{Ai} = Z_{Bi} \Leftrightarrow S_A = S_B = S$

$i_{ολ,α} = \frac{n_{B1}}{n_{A4}} = -(1+S)$ το μείον (-) δηλώνει αντίστροφη φορά περιστροφής

$$i_{ολ,β} = \frac{n_{B1}}{n_{A4}} = (1+S)^2$$

$$\left|\frac{i_{ολ,β}}{i_{ολ,α}}\right| = 1 + S > 1$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

Σε περίπτωση που οι φορές περιστροφής που ορίζονται αυθαίρετα, ορισθούν διαφορετικά, τότε τα $i_{ολ,α}$ και $i_{ολ,β}$ μπορεί να προκύψουν με διαφορετικά πρόσημα. Αυτό ουδεμία αλλαγή επιβάλλει στην τελική λύση της άσκησης καθώς το μόνο που δηλώνει είναι αλλαγή στην φορά περιστροφής κάποιου οδοντωτού τροχού.

2. Μονοβάθμιος μειωτήρας στροφών σχέσης μετάδοσης 1 λειτουργεί μεταξύ των θερμοκρασιών $20^{\circ}C$ και $100^{\circ}C$. Αν το υλικό των τροχών έχει συντελεστή θερμικής διαστολής $a_G = 16\mu m / m^{\circ}C$, να υπολογιστεί ο ελάχιστος συντελεστής θερμικής διαστολής του υλικού του κιβωτίου, ώστε να είναι δυνατή η ομαλή λειτουργία του όσον αφορά στη χάρη κατατομών. Δίνονται συντελεστής πάχους οδόντων $c_s = 0,499$ και Z=50.

ΛΥΣΗ:

Η επίδραση του συντελεστή θερμικής διαστολής σε ένα μέγεθος Α δίνεται από την γενική σχέση:

$$\frac{\Delta A}{A} = \alpha \Delta T \Leftrightarrow \frac{A' - A}{A} = \alpha \Delta T \Leftrightarrow A' = (1 + \alpha \Delta T) A$$

Για την γεωμετρία του οδόντος των τροχών ισχύει:

Βήμα στον αρχικό κύκλο	$t_0 = \pi m$
Πάχος οδόντος στον αρχικό κύκλο	$S_0 = C_s \pi m$
Διάκενο οδόντων στον αρχικό κύκλο	$l_0 = (1 - C_s) \pi m$
Χάρη κατατομών στον αρχικό κύκλο	$\Delta S_0 = l_0 - S_0 = (1 - 2C_s) \pi m$

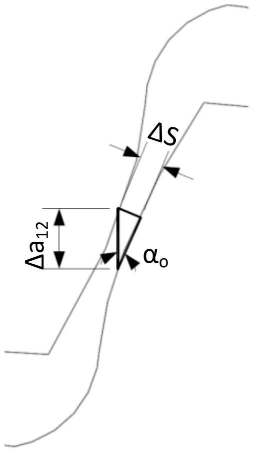
Η αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί διαστολή του οδόντος και άρα μεταβολή του module. Συνεπώς μετά την αύξηση της θερμοκρασίας το νέο module θα είναι:

$m' = (1 + \alpha_G \Delta T) m$

Τα παραπάνω υπολογισθέντα μεγέθη με τη σειρά τους γίνονται:

Βήμα στον αρχικό κύκλο	$t = \pi (1 + \alpha_G \Delta T) m$
Πάχος οδόντος στον αρχικό κύκλο	$S = C_s \pi (1 + \alpha_G \Delta T) m$
Διάκενο οδόντων στον αρχικό κύκλο	$l = (1 - C_s) \pi (1 + \alpha_G \Delta T) m$
Χάρη κατατομών στον αρχικό κύκλο	$\Delta S = l - S = (1 - 2C_s) \pi (1 + \alpha_G \Delta T) m$

Υπολογισμός της σχέσης της χάρης κατατομών και της μετατόπισης των αξόνων:



Από το σχήμα είναι προφανές πως:

$$\Delta a_{12} = \frac{\Delta S}{\sin\alpha_o} \Leftrightarrow \Delta a_{12} = \frac{(1-2C_s)\pi(1+\alpha_G \Delta T)m}{\sin\alpha_o} \qquad (1)$$

Για τον υπολογισμό της μεταβολής απόστασης αξόνων χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή. Θα μπορούσε κάποιος να πει πως η μεταβολή της απόστασης αξόνων δίνεται από την σχέση:

$$\Delta a_{12} = a_{12}(\alpha_G - \alpha_C)\Delta T = mZ(\alpha_G - \alpha_C)\Delta T \rightarrow$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Αυτή η σχέση θα ίσχυε μόνον εάν δεν υπήρχε αλλαγή στο module της οδόντωσης. Αυτό σημαίνει πως αν και σε απόλυτη τιμή η αλλαγή της αρχικής απόστασης αξόνων είναι σωστή (δεδομένης της ονομαστικής απόστασης αξόνων για το module- m), εντούτοις η αλλαγή του module προκαλεί άλλη μια αλλαγή της ονομαστικής απόστασης των αξόνων των τροχών. Επομένως, η σωστή μεταβολή της απόστασης αξόνων δίνεται από την προηγούμενη σχέση προσαυξημένη κατά την μεταβολή του module ήτοι:

$$\Delta a_{12} = mZ(\alpha_G - \alpha_C)(1+\alpha_G \Delta T)\Delta T \qquad (2)$$

Για να είναι δυνατή η ομαλή λειτουργία του κιβωτίου όσον αφορά στη χάρη κατατομών, θα πρέπει:

$$(1) = (2) \Leftrightarrow mZ(\alpha_G - \alpha_C)(1+\alpha_G \Delta T)\Delta T = \frac{(1-2C_s)\pi(1+\alpha_G \Delta T)m}{\sin\alpha_o} \Leftrightarrow$$

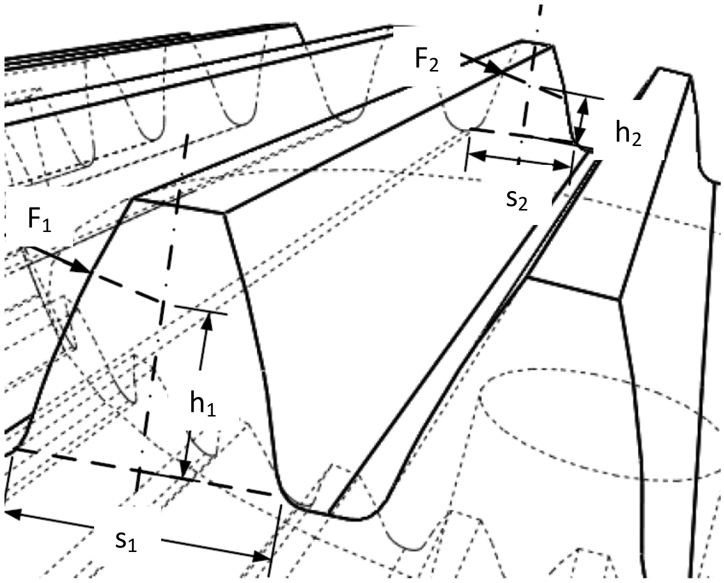
$$\alpha_C = \alpha_G - \frac{(1-2C_s)\pi}{Z\sin\alpha_o \Delta T}$$

Αριθμητική εφαρμογή μας δίνει τον επιθυμητό συντελεστή θερμικής διαστολής του υλικού του κιβωτίου ο οποίος βρίσκεται:

$$\alpha_C = 11{,}4 \frac{\mu m}{m^\circ C}$$

3. Σε κωνικό οδοντωτό τροχό με ευθεία οδόντωση εξειλιγμένης να συγκριθεί η καταπόνηση που αναπτύσσεται σε κάθε δόντι από τη δύναμη λειτουργίας στο εξωτερικό και στο εσωτερικό του (μεγάλη και μικρή διάμετρος αντίστοιχα).

<u>ΛΥΣΗ</u>:



Όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα, οι οδόντες μικραίνουν κατά την έννοια της κωνικότητας του τροχού. Αυτό σημαίνει πως το module κάθε διατομής είναι διαφορετικό. Το module όμως αποτελεί σταθερά αναλογίας για τους οδόντες και επομένως θα ισχύουν οι σχέσεις:

$s_1 = Cs_2$

$h_1 = Ch_2$

Αν «α» είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της δύναμης με το οριζόντιο επίπεδο (κάθετο στην κατατομή οδόντος) και b το πλάτος της οδόντωσης, τότε η καμπτικές τάσεις υπολογίζονται από τη σχέση:

$\sigma = \frac{My}{I}$ όπου y η απόσταση από τον ουδέτερο άξονα. Με αντικατάσταση, η μέγιστη αναπτυσσόμενη τάση στην διατομή ποδός είναι:

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{F\cos(\alpha)h\frac{s}{2}}{\frac{s^3 b}{12}} = \frac{F\cos(\alpha)h}{\frac{s^2 b}{6}}$$

Και επομένως για τις δύο διατομές θα είναι:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{\dfrac{F_1\cos(\alpha)h_1}{\dfrac{s_1^2b}{6}}}{\dfrac{F_2\cos(\alpha)h_2}{\dfrac{s_2^2b}{6}}}=\frac{\dfrac{F_1\cos(\alpha)Ch_2}{\dfrac{C^2s_2^2b}{6}}}{\dfrac{F_2\cos(\alpha)h_2}{\dfrac{s_2^2b}{6}}}=\frac{F_1}{F_2}\frac{1}{C} \qquad (1)$$

Για να υπολογίσουμε το λόγο τον δυνάμεων F_1 και F_2 θα πρέπει να σκεφτούμε ότι οι δυνάμεις αυτές δεν είναι ίσες διότι οι δύο διατομές δεν έχουν την ίδια στιβαρότητα. Η στιβαρότητα ορίζεται ως ο λόγος της ασκούμενης δύναμης προς την μετατόπιση ήτοι $K=\frac{F}{x_{max}}$. Εφαρμόζοντας το νόμο του Hooke καταλήγουμε σε μια έκφραση της στιβαρότητας: $Fh\propto\frac{EI}{L}$. Ο λόγος των δυνάμεων F_1 και F_2 είναι ίσος με το λόγο των στιβαροτήτων K_1 και K_2 .

$$\frac{F_1h_1}{F_2h_2}=\frac{\dfrac{EI_1}{h_1}}{\dfrac{EI_2}{h_2}}\Leftrightarrow\frac{F_1}{F_2}=\frac{\dfrac{s_1^3b/12}{h_1^2}}{\dfrac{s_1^3b/12}{h_1^2}}\Leftrightarrow\frac{F_1}{F_2}=\frac{\dfrac{C^3s_2^3b/12}{C^2h_2^2}}{\dfrac{s_1^3b/12}{h_1^2}}\Leftrightarrow\frac{F_1}{F_2}=C \qquad (2)$$

Με αντικατάσταση της (2) στην (1) παίρνουμε:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{F_1}{F_2}\frac{1}{C}=C\frac{1}{C}=1$$

Επομένως οι οδόντες καταπονούνται το ίδιο στην εσωτερική και εξωτερική διάμετρο του τροχού.