ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ

Μάθημα: Στοιχεία Μηχανών ΙΙ
Εξάμηνο 4ο

Φρένα

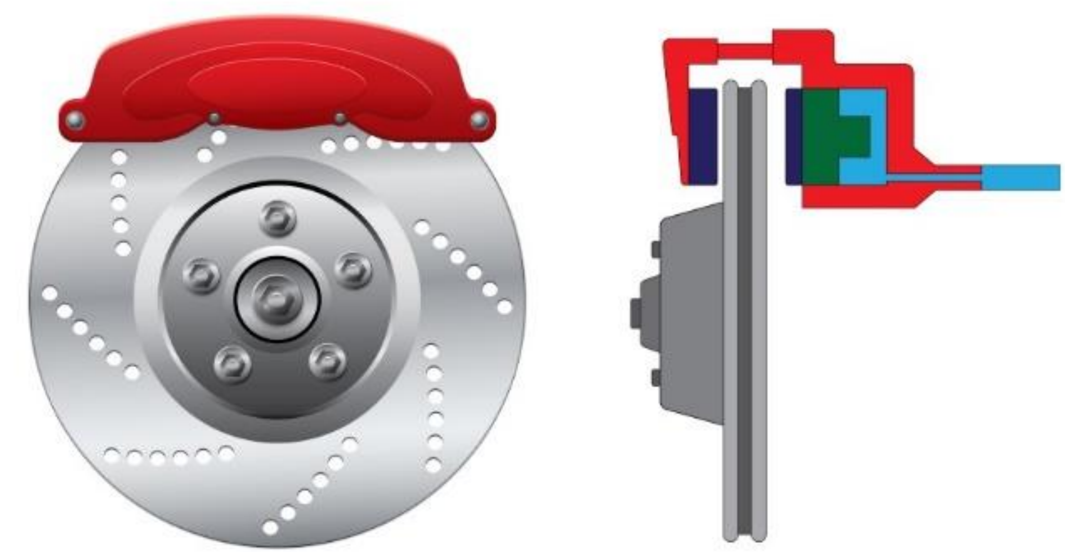
Εφαρμογές σε Συμπλέκτες & Φρένα

Νικόλαος Ρόγκας

Διπλ. Μηχανολόγος Μηχανικός
Υ.Δ. Εργαστήριο Στοιχείων Μηχανών

nrogkas@mail.ntua.gr

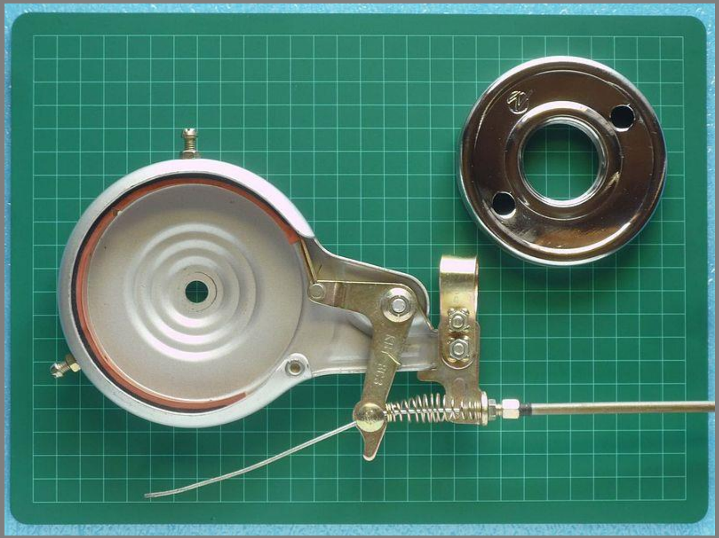

P
P
P
P
P
Εσωτερικές σιαγώνες
Εξωτερικές σιαγώνες
Ταινιοπέδη



δισκόφρενα

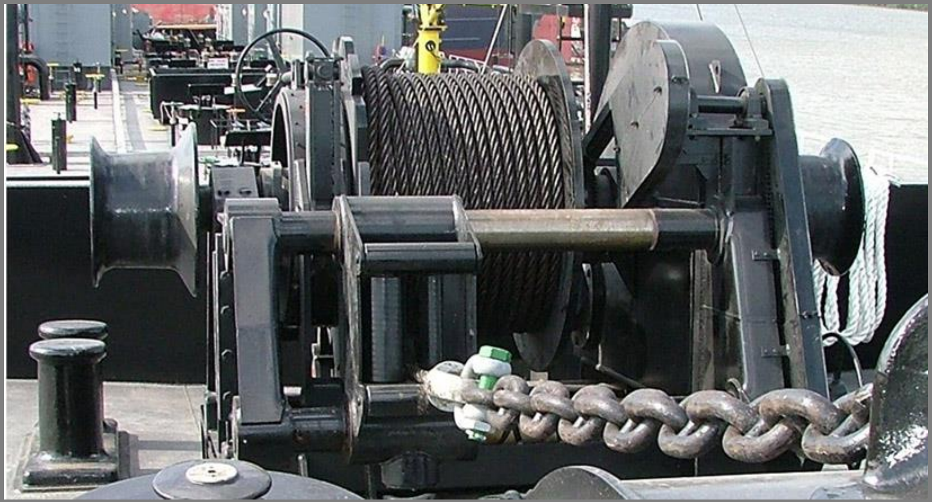
Ταινιοπέδη (band brake) (1/3)

Τυπική ταινιοπέδη

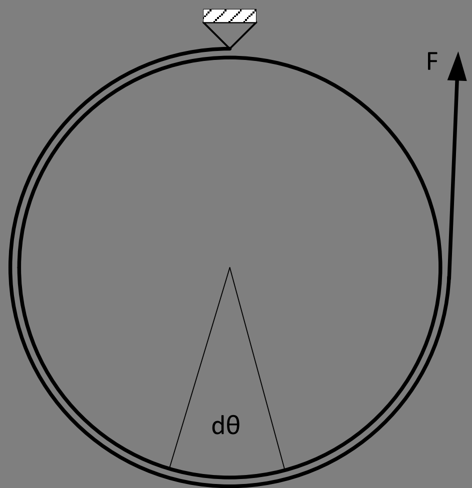


Φρένο ποδηλάτου

Μηχανισμός άγκυρας



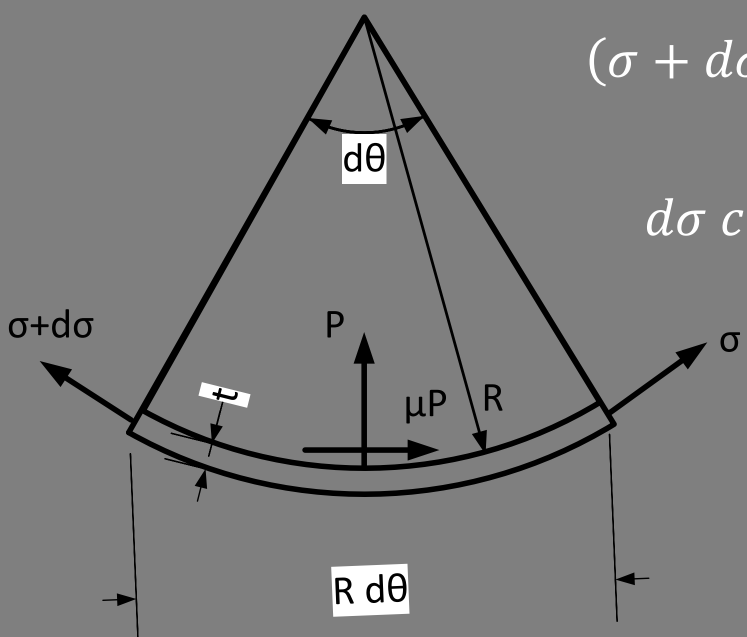
Ταινιοπέδη (2/3)



$$(\sigma + d\sigma)\, sin\left(\frac{d\vartheta}{2}\right) b\ t + \sigma\ sin\left(\frac{d\vartheta}{2}\right) b\ t - \mathrm{P\ R}\ d\vartheta\ b = 0$$

$$\Rightarrow 2\sigma\ sin\left(\frac{d\vartheta}{2}\right) t + d\sigma\ sin\left(\frac{d\vartheta}{2}\right)\ t = P\ R\ d\vartheta$$

$$\Rightarrow 2\sigma \frac{d\vartheta}{2} t = P\ R\ d\vartheta \Rightarrow \mathrm{\sigma\ t = P\ R} \quad (1)$$

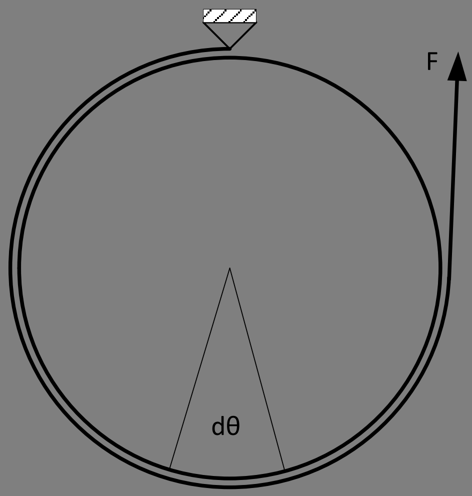


$$(\sigma + d\sigma)\ cos\left(\frac{d\vartheta}{2}\right) b\ t - \sigma\ cos\left(\frac{d\vartheta}{2}\right) b\ t - \mathrm{\mu\ P\ R}\ d\vartheta\ b = 0$$

$$d\sigma\ cos\left(\frac{d\vartheta}{2}\right)\ t = \mathrm{\mu\ P\ R}\ d\vartheta\ b \Rightarrow d\sigma/d\vartheta = \mu\ P\ R\frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow d\sigma/d\vartheta = \mu\ \sigma \Rightarrow d\sigma/\sigma = \mu\ d\vartheta \quad (2)$$

Ταινιοπέδη (3/3)

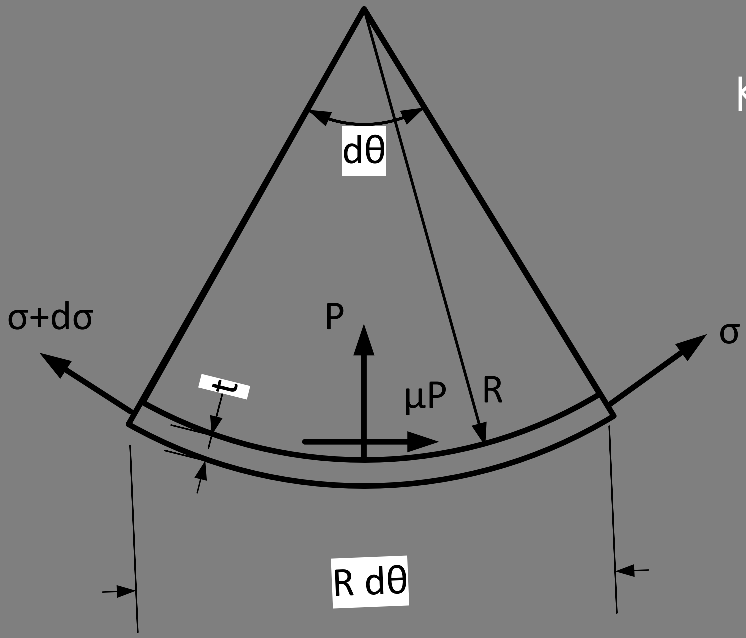


$$\int_{\sigma_1}^{\sigma(\theta)} \frac{d\sigma}{\sigma} = \int_0^{\theta} \mu d\theta \rightarrow \ln\left(\frac{\sigma(\theta)}{\sigma_1}\right) = \mu\theta$$

$$\rightarrow \sigma(\theta) = \sigma_1 e^{\mu\theta}$$

$$\sigma(0) = \frac{F}{bt} \rightarrow \sigma_1 = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{bt}} \rightarrow \sigma(\theta) = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{bt}} e^{\mu\theta}$$

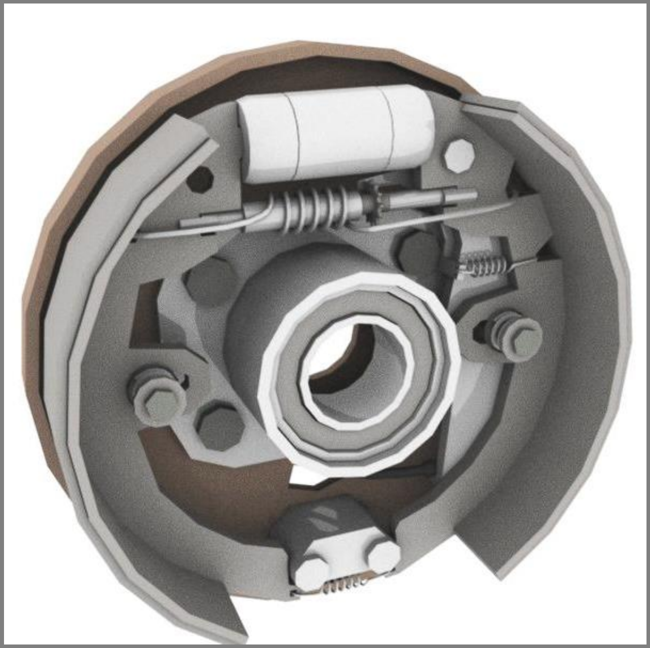
Και από (1): $P(\theta) = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{bR}} \mathrm{e}^{\mu\theta}$



Ροπή: $dM = \mu \mathrm{~P~R~d\theta~b~R}$

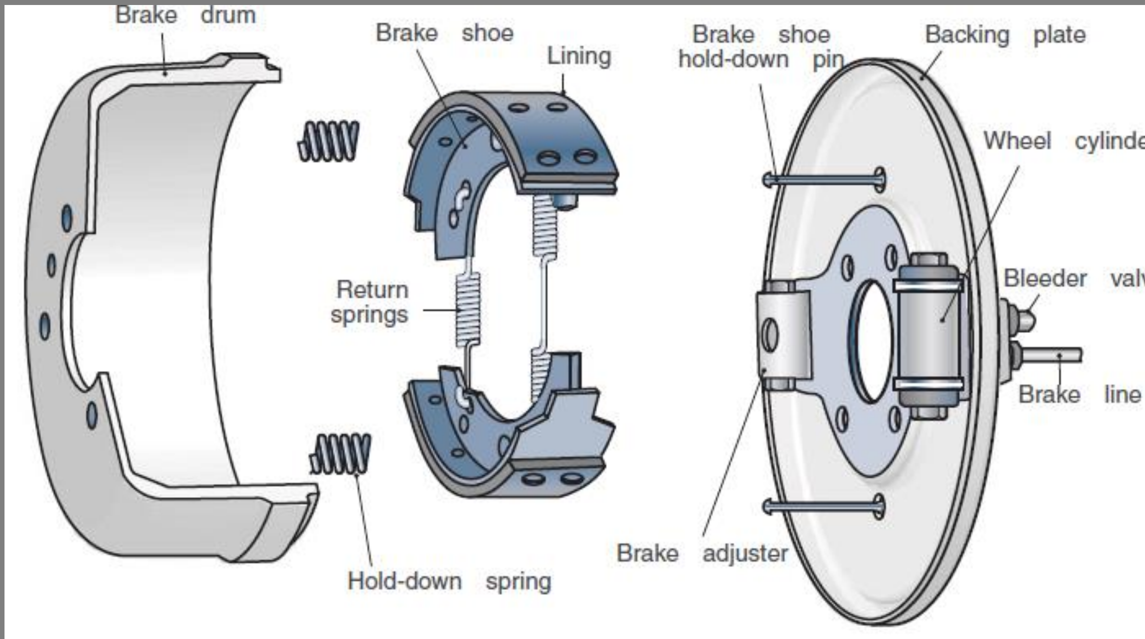
$$\rightarrow \mathrm{M} = \mu \mathrm{~F~R~b} \left(e^{\mu\theta_{max}} - 1\right)$$

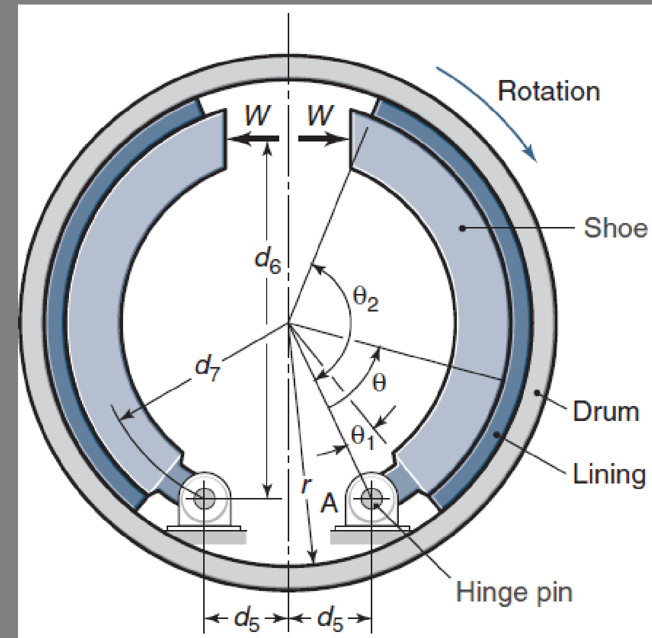
Φρένα τυμπάνων (drum brakes) (1/7)



Φρένα τυμπάνων (2/7)

$\theta_2 < 90°$





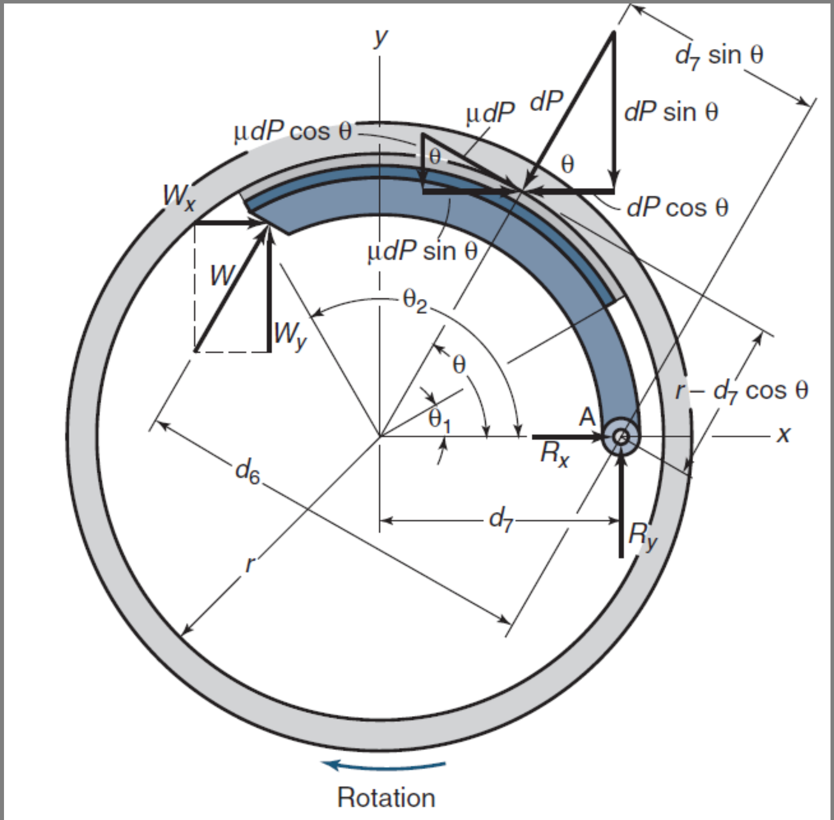
Παραδοχή: Η πίεση μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\left.\begin{aligned} p &= p_{max}\left(\frac{sin\theta}{sin\theta_\alpha}\right) \\ dP &= pbr\, d\theta \end{aligned}\right\} \quad dP = \frac{p_{max}br\ sin\theta\ d\theta}{\sin\theta_\alpha}$$

b: πλάτος

θ_α : η γωνία όπου η πίεση μεγιστοποιείται (90°). Αν θ_2<90°, τότε $\theta_\alpha=\theta_2$.

Φρένα τυμπάνων (3/7)



Μοχλοβραχίονας κάθετης δύναμης: $d_7 sin\theta$

$$M_P = \int d_7 sin\theta dP = \frac{d_7 b r p_{max}}{sin\theta_\alpha}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^2\theta d\theta$$

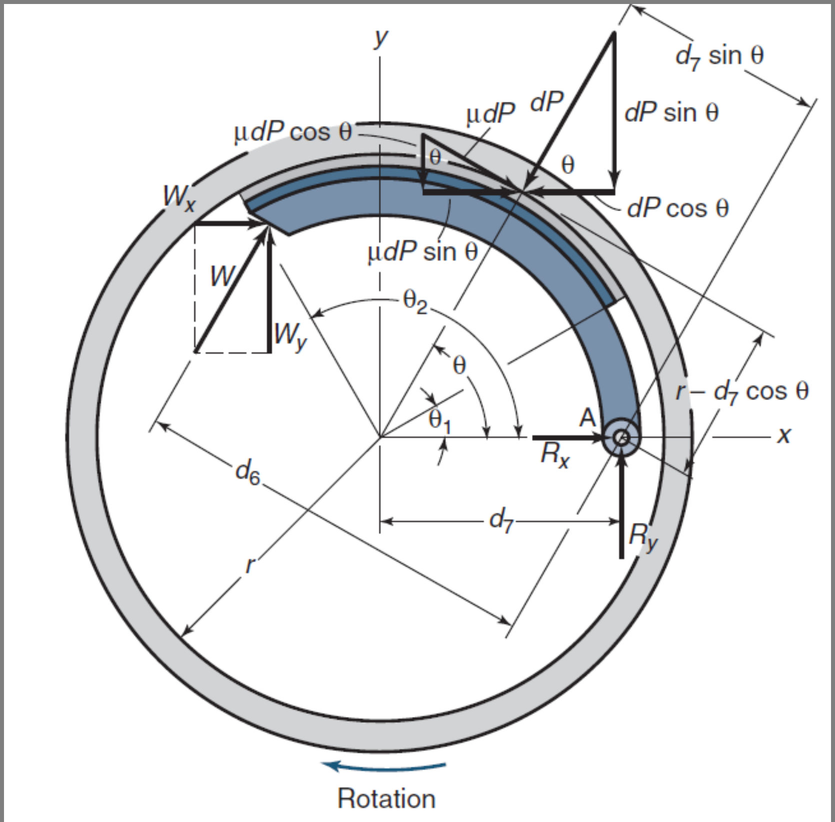
$$= \frac{b r d_7 p_{max}}{4 sin\theta_1}\left[2(\theta_2 - \theta_1)\frac{\pi}{180°} - sin2\theta_2 + sin2\theta_1\right]$$

Μοχλοβραχίονας δύναμης τριβής: $r - d_7 cos\theta$

$$M_F = \int (r - d_7 cos\theta)\,\mu\, dP = \frac{\mu p_{max}\, br}{sin\theta_1}\int_{\theta_1}^{\theta_2}(r - d_7 cos\theta) sin\,\theta\, d\theta$$

$$M_F = -\frac{\mu p_{max} br}{sin\theta_\alpha}\left[r(cos\theta_2 - cos\theta_1) + \left(\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1\right)\right]$$

Φρένα τυμπάνων (4/7)



Ισορροπία ροπών ως προς A

$$-W d_6 - M_F + M_P = 0 \rightarrow W = \frac{M_P - M_F}{d_6}$$

$$\mathrm{T} = \int r\mu dP = \frac{\mu p_{max} b r^2}{sin\theta_\alpha}\int_{\theta_1}^{\theta_2} sin\theta\, d\theta$$

$$\rightarrow \mathrm{T} = \frac{\mu \mathrm{p_{max}} \mathrm{br}^2 (cos\theta_1 - cos\theta_2)}{sin\theta_\alpha}$$

T: ροπή φρεναρίσματος (braking torque)

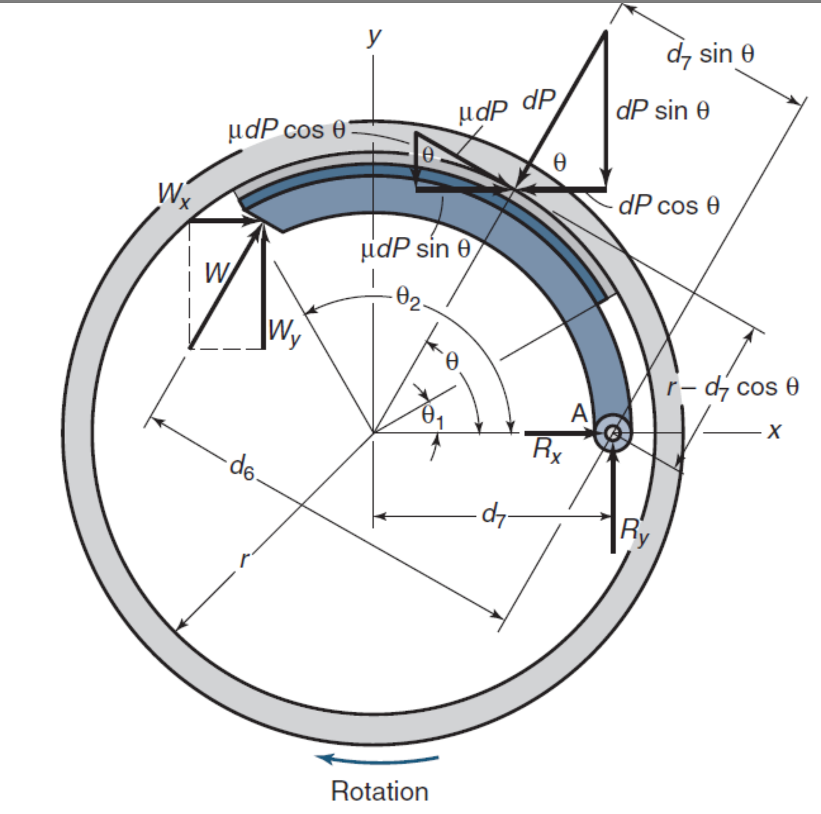
Ισορροπία δυνάμεων στην x-κατεύθυνση

$$R_x + W_x - \int cos\theta dP + \int \mu\, sin\theta\, dP = 0$$

$$R_x = \frac{p_{max} b r}{sin\theta_\alpha}\int_{\theta_1}^{\theta_2} sin\theta\, cos\theta\, d\theta - \mu \frac{p_{max} b r}{sin\theta_\alpha}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^2\theta\, d\theta - W_x$$

$$R_x = -W_x + \frac{p_{max} b r}{4 sin\theta_\alpha}\left[2\left(\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1\right)\right] - \frac{\mu p_{max} b r}{4 sin\theta_\alpha}\left[2(\theta_2 - \theta_1)\frac{\pi}{180°} - sin2\theta_2 + sin2\theta_1\right]$$

Φρένα τυμπάνων (5/7)



Ισορροπία δυνάμεων στην y-κατεύθυνση

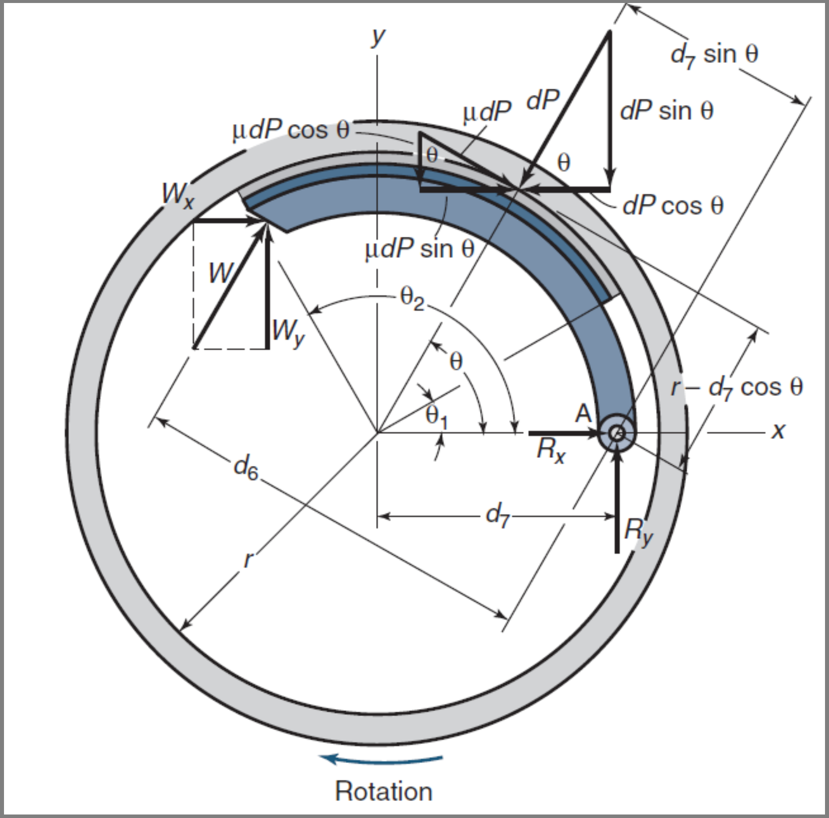
$$R_y + W_y - \int \mu dP\ cos\theta - \int dP\ sin\theta\ = 0$$

$$R_y = -W_y + \frac{2\mu p_{max} br}{4sin\theta_\alpha}\left(\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1\right) + \frac{p_{max} br}{4sin\theta_\alpha}\left[2(\theta_2 - \theta_1)\frac{\pi}{180°} - sin2\theta_2 + sin2\theta_1\right]$$

Φρένα τυμπάνων (6/7)

Αν αλλάξει η φορά περιστροφής

$$-W d_6 + M_F + M_P = 0 \rightarrow W = \frac{M_P + M_F}{d_6}$$



$$R_x = -W_x + \frac{p_{max} br}{4 sin\theta_\alpha}\left[2\left(\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1\right)\right] + \frac{\mu p_{max} br}{4 sin\theta_\alpha}\left[2(\theta_2 - \theta_1)\frac{\pi}{180°} - sin2\theta_2 + sin2\theta_1\right]$$

$$R_y = -W_y - \frac{\mu p_{max} br}{4 sin\theta_\alpha}\left(\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1\right) + \frac{p_{max} br}{4 sin\theta_\alpha}\left[2(\theta_2 - \theta_1)\frac{\pi}{180°} - sin2\theta_2 + sin2\theta_1\right]$$

Φρένα τυμπάνων (7/7)

Ροπή δύναμης τριβής και ροπή δύναμης επενέργησης στην ίδια διεύθυνση: **self-energizing shoe** (υπολογισμοί απ' τους πίνακες)

$$W_{sE} = \frac{M_P - M_F}{d_6}$$

Friction material	Coefficient of friction, μ	Maximum contact pressure,[a] p_{max} kPa	Maximum bulk temperature, $t_{m,\ max}$ °C
Molded	0.25–0.45	1030–2070	204–260
Woven	0.25–0.45	345–690	204–260
Sintered metal	0.15–0.45	1030–2070	204–677
Cork	0.30–0.50	55–95	82
Wood	0.20–0.30	345–620	93
Cast iron; hard steel	0.15–0.25	690–1720	260

Friction material	Coefficient of friction, μ
Molded	0.06–0.09
Woven	0.08–0.10
Sintered metal	0.05–0.08
Paper	0.10–0.14
Graphitic	0.12 (avg.)
Polymeric	0.11 (avg.)
Cork	0.15–0.25
Wood	0.12–0.16
Cast iron; hard steel	0.03–0.16

Ροπή δύναμης τριβής και ροπή δύναμης επενέργησης στην ίδια διεύθυνση: **deenergizing shoe**

Μειώνεται το p_{max} διότι πρέπει να ισχύει:

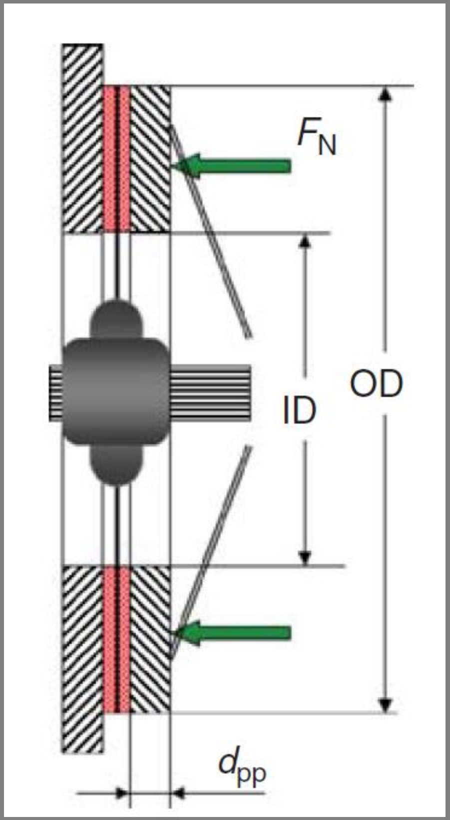
$$W_{dE} = \frac{M_P + M_F}{d_6}$$

$$W_{sE} = W_{dE} \rightarrow \mathrm{M_P}(\mathrm{p_{max}}) - \mathrm{M_F}(\mathrm{p_{max}}) = \mathrm{M_P}(\mathrm{p'_{max}}) - \mathrm{M_F}(\mathrm{p'_{max}})$$

Εφαρμογή 1: Υπολογισμός πάχους δίσκου συμπλέκτη

Δεδομένα

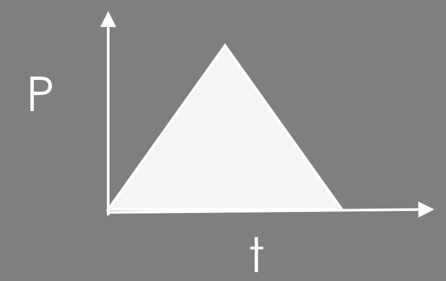
- μάζα οχήματος: 1300 kg
- ακτίνα τροχού: 0.3 m
- σχέσεις μετάδοσης: i_1=3.14, final drive: i_0=3.56
- ΜΕΚ: μέγιστη ροπή 170 Nm @ 350 rad/s
- ένας δίσκος (z=1)
- friction material: organic lining μ=0,38
- ελατήριο διαγράγματος
- D_{out}=225 mm
- D_{in}=150 mm
- Συντελεστής ασφαλείας: β=1,5



Βασικοί υπολογισμοί

1. Επιφάνεια τριβής $A = \frac{\pi\left(D_{out}^2 - D_{in}^2\right)}{4} = 0.0221\ m^2$
2. Μέση ακτίνα τριβής $r_\mu \approx \frac{\mathrm{D_{out}+D_{in}}}{4} = 0.094\ \mathrm{m}$
3. Απαιτούμενη ροπή συμπλέκτη: $T_c = \beta \times \mathrm{T_{E_{max}}} = 1.5\ \times 170 = 255 Nm$
4. Μεταφερομένη ροπή: $T_c = F_\mu \times r_\mu \times z$
5. Δύναμη τριβής: $F_\mu = \frac{T_c}{r_\mu \times z} = 1356\ N$
6. Απαιτούμενη δύναμη ελατηρίου $F_N = \frac{F_\mu}{\mu} = 3568\ \mathrm{N}$
7. Πίεση επιφανείας: $p = \frac{\mathrm{F_N}}{\mathrm{A_f}} = 161.448\ \mathrm{Pa} = 16.1\ \mathrm{N/cm^2}$

Εφαρμογή 1: Υπολογισμός πάχους δίσκου συμπλέκτη



Υπολογισμός πάχους δίσκου

1. Υπολογισμός σε μέγιστη ισχύ
2. Έστω $T_c = 100\ Nm, \Delta\omega_{\max} = 150\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}, \mathrm{t_{slip}} = 1.5\ \mathrm{s}$
3. <u>Παραδοχή</u>: Τριγωνικό προφίλ ισχύος του πυρήνα κατά την ολίσθηση: $E_c = P_{c_{max}} \times \frac{t}{2} = 11{,}250\ J$
4. <u>Παραδοχή</u>: αύξηση θερμοκρασίας core material (cast-iron) δίσκου $\Delta\theta \sim 10\ ℃$
5. $\Delta\theta = E_c/(2\ m_{pp} c_p)$
6. $c_p = 420\,\frac{K}{kg\ K}$
7. $m_{pp} = \frac{E_c}{2\Delta\theta\ \mathrm{c_p}} = 1.34\ \mathrm{kg}$
8. $m_{pp} = A_f d_{pp} \rho \rightarrow d_{pp} = 0.0084m\ (\rho = 7200\ \mathrm{kg/m^3})$

Εκλέγεται $d_{pp} = 10\ mm$

Εφαρμογή 2: Υπολογισμός διαμέτρων δίσκου συμπλέκτη

Δεδομένα

- Ροπή μηχανής: $T_w = 150\ N\mathrm{m}$
- Συντελεστής τριβής: μ=0,35
- Μέγιστη επιτρεπόμενη πίεση επιφανείας: $p_{max} = 0.345\ MPa$
- Συντελεστής ασφαλείας : 1.5,
- Χρήση θεωρίας ομοιόμορφης φθοράς

Στρεπτική ροπή

$$T_w = 1.5\ \times 150 = \pi\ \mu\ r_{in}\ p_{max}\left(r_{out}^2 - r_{in}^2\right)$$

$$\rightarrow r_{in}(r_{out} - r_{in}) = \frac{1.5\ \times 150\ [Nm]}{\pi\ \times 0.35 \times 0.345 \times 10^6\ [\frac{N}{m^2}]} = 5.931\ \times 10^{-4}$$

$$\rightarrow r_{out} = \sqrt{\frac{5.931 \times 10^{-4}}{r_{in}} + r_{in}^2}$$

Θα επιλεγεί η μικρότερη δυνατή r_{out} ως προς την r_{in}

$$\boxed{\frac{d}{dr_{in}}\left(r_{out}(r_{in})\right) = 0}$$

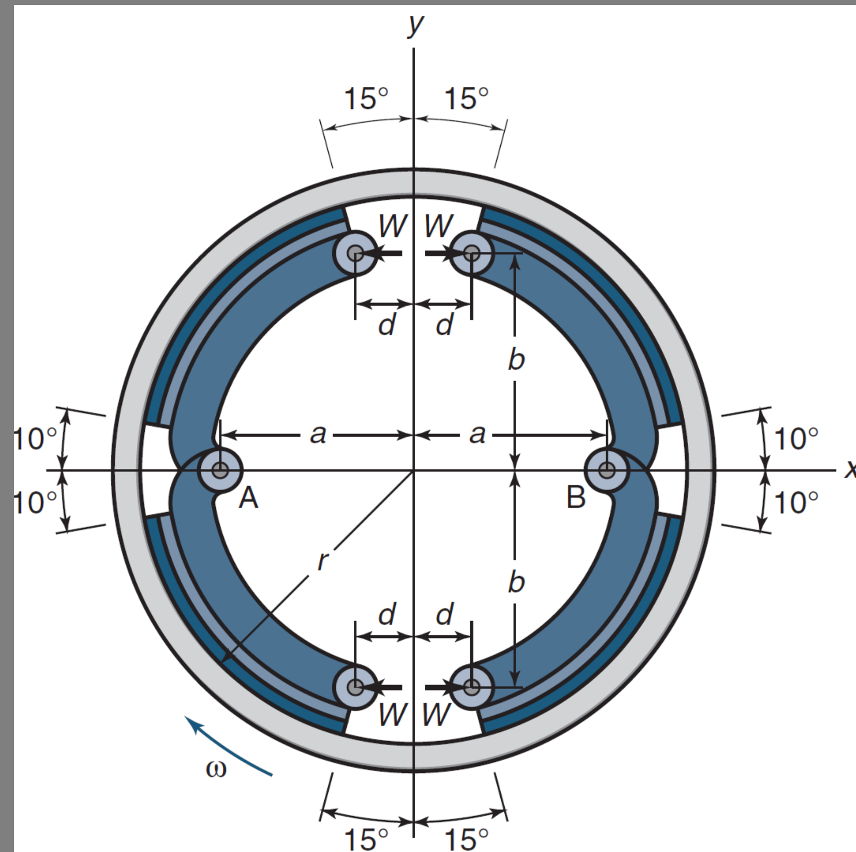
$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{5.931 \times 10^{-4}}{r_{in}} + r_{in}^2}}\left(2r_{in} - \frac{5.931 \times 10^{-4}}{r_{in}^2}\right) = 0$$

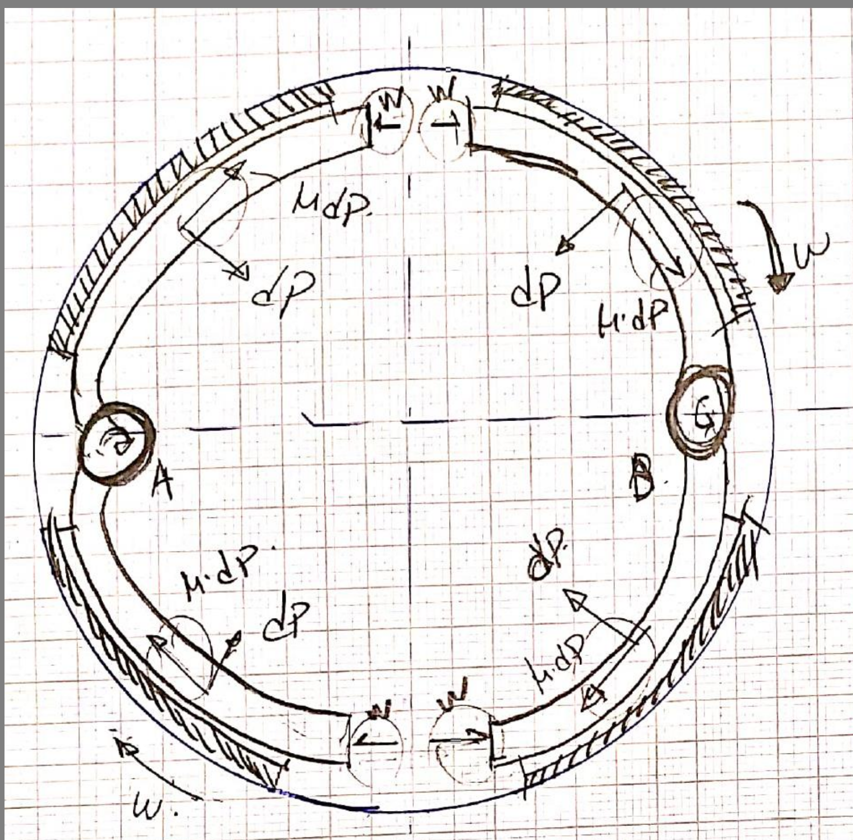
Λύνεται επαναληπτικά και προκύπτει $r_{in} = 66.69mm$
Αρά $r_{out} = 115.5\ mm, P = 7057\ N$

Εφαρμογή 3: Υπολογισμός φρένου τυμπάνων

Δεδομένα

- εσωτερική διάμετρος: 400mm
- πλάτος: 75 mm
- συντελεστής τριβής: 0.24
- μέγιστη πίεση επιφανείας: 1 Mpa





Εφαρμογή 3: Υπολογισμός φρένου τυμπάνων

Σύμφωνα με τα σχήματα, για ωρολογιακή φορά περιστροφής οι επιφάνειες τριβής: πάνω-δεξιά και κάτω-αριστερά, έχουν τη ροπή λόγω δύναμης τριβής στην ίδια διέυθυνση με τη ροπή λόγω δύναμης επενέργησης (self-energising shoe). Αντίθετα, οι επιφάνειες τριβής: πάνω-αριστερά και κάτω-δεξιά έχουν τη ροπή λόγω δύναμης τριβής στην αντίθετη διέυθνση από τη ροπή λόγω δύναμης επενέργησης (deenergising shoe).

Από τα σχήματα των διαφ. 7, 16 προκύπτουν: $d_5 = 50\ mm, d_6 = 165\ mm, d_7 = 150\ mm, \theta_2 = \theta\alpha = 75, \theta_1 = 10°$

<u>self-energising shoe</u>

$$M_{P_s} = \frac{brd_7 p_{max}}{4sin\theta_1}\left[2(\theta_2 - \theta_1)\frac{\pi}{180°} - sin2\theta_2 + sin2\theta_1\right]$$

$$\rightarrow M_{P_s} = \frac{0.075 \times 0.2 \times 0.15 \times (0.1 \times 10^6)}{4sin75°}\left[2(75° - 10°)\frac{\pi}{180°} - sin150° + sin20°\right]$$

$$\rightarrow MP_s = 1229\ Nm$$

$$M_{F_s} = -\frac{\mu p_{max} br}{sin\theta_\alpha}\left[r(cos\theta_2 - cos\theta_1) + \left(\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1\right)\right]$$

$$\rightarrow MF_s = 288.8\ Nm$$

$$W_{sE} = \frac{M_{P_s} - M_{F_s}}{d_6} = 5698\ N, T_s = \frac{\mu p_{max} br^2(cos\theta_1 - cos\theta_2)}{sin\theta_\alpha} = 541.2\ Nm$$

Εφαρμογή 3: Υπολογισμός φρένου τυμπάνων

Σύμφωνα με τα σχήματα, για ωρολογιακή φορά περιστροφής οι επιφάνειες τριβής: πάνω-δεξιά και κάτω-αριστερά, έχουν τη ροπή λόγω δύναμης τριβής στην ίδια διεύθυνση με τη ροπή λόγω δύναμης επενέργησης (self-energising shoe). Αντίθετα, οι επιφάνειες τριβής: πάνω-αριστερά και κάτω-δεξιά έχουν τη ροπή λόγω δύναμης τριβής στην αντίθετη διεύθυνση από τη ροπή λόγω δύναμης επενέργησης (deenergising shoe).
δε
Από τα σχήματα των διαφ. 7, 16 προκύπτουν: $d_5 = 50\ mm, d_6 = 165\ mm, d_7 = 150\ mm, \theta_2 = \theta\alpha = 75, \theta_1 = 10°$

<u>deenergising shoe</u> (αλλάζει το p_{max})

$$M_{P_D} = \frac{brd_7 p_{max_d}}{4sin\theta_1}\left[2(\theta_2 - \theta_1)\frac{\pi}{180°} - sin2\theta_2 + sin2\theta_1\right] \rightarrow M_{P_d} = 0.001229\, p_{max_d}$$

$$M_{F_d} = -\frac{\mu p_{max} br}{sin\theta_\alpha}\left[r(cos\theta_2 - cos\theta_1) + \left(\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1\right)\right] \rightarrow M_{F_d} = 0.0002888\, p_{max_d}$$

$$W_{dE} = \frac{M_P + M_F}{d_6} = W_{sE} = 5698\ N \rightarrow p_{max_d} = 0.6194\ MPa$$

$$T_d = \frac{T_s}{p_{max}} p_{max_d} = 335.2\ Nm$$

$$\boxed{T_{total} = 2(T_s + T_d) = 2(541.2 + 335.2) = 1753\ Nm}$$